

Méthodes de résolution numérique d'équations

[1-Fonctions réciproques](#)

[2-Méthode de dichotomie](#)

[3-Méthode du point fixe](#)

[4-Méthode de Newton](#)



Fonctions réciproques

1- Bijection et bijection réciproque

Définition Soient A et B deux ensembles, et $f : A \rightarrow B$ une fonction dont l'ensemble de définition est $D_f = A$. On dit que f est une bijection lorsque pour tout élément b de l'ensemble d'arrivée B , il existe un unique élément a dans l'ensemble de départ A tel que $f(a) = b$.

Exemple La fonction affine $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = mx + p$ est une bijection lorsque $m \neq 0$. En effet pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'équation $f(a) = b$ admet une unique solution $a = \frac{b - p}{m}$.

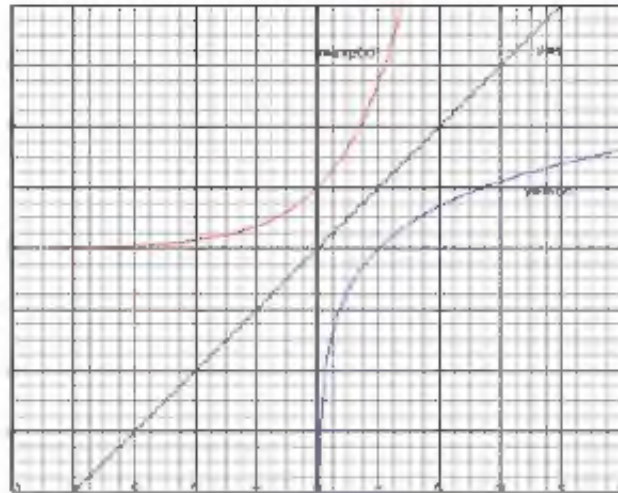
Définition Soient A et B deux ensembles, et $f : A \rightarrow B$ une bijection. On appelle bijection réciproque de f la fonction qui à b dans B associe l'unique a de A tel que $f(a) = b$. Cette fonction est notée $f^{-1} : B \rightarrow A$. C'est aussi une bijection.

Exemple On a vu (plutôt : on a admis) que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = e^x$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction qui à $b \in]0, +\infty[$ associe l'unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a = b$. C'est donc la fonction $f^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f^{-1}(b) = \ln b$.

On suppose maintenant que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection, dont C_f est la courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Proposition

La courbe représentative de la bijection réciproque f^{-1} est la courbe symétrique de C_f par rapport à la droite $D: y = x$ (la première bissectrice).



2- Cas des fonctions régulières

Rappelons que, d'après le T.V.I, l'image d'un intervalle I par une fonction continue sur I est un intervalle J . De ce fait, on a immédiatement la première partie de la

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . On note J l'intervalle $f(I)$. Si f est strictement monotone, alors $f: I \rightarrow J$ est une bijection. De plus la bijection réciproque $f^{-1}: J \rightarrow I$ est aussi continue et strictement monotone, de même monotonie que f .

Ce résultat permet de justifier les affirmations des exemples précédents! La continuité de la bijection réciproque est plus difficile à démontrer, et nous l'admettrons.

On suppose maintenant que f est une fonction continue et dérivable sur I , et que f est strictement monotone sur I . On a vu qu'il suffit pour cela que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, mais que ce n'est pas nécessaire ($f(x) = x^3, \dots$). D'après la proposition précédente $f: I \rightarrow J$ est une bijection, et f^{-1} est continue. On a mieux :

Proposition

Si f est une fonction continue, dérivable et f strictement monotone sur I . Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et son nombre dérivé en y_0 est donnée par

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

On peut comprendre (et même démontrer) cette formule en examinant simultanément la courbe représentative de f et celle de f^{-1} : si $m \neq 0$ est le coefficient directeur de la tangente T à C_f en x_0 , le coefficient directeur de la droite symétrique de T par rapport à Δ est $1/m$.

Méthode de dichotomie (Méthodes de résolution numérique d'équations)

On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$, pour une fonction f donnée. Plus précisément, on suppose que l'on sait que cette équation admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[a, b]$, et l'on cherche à déterminer une valeur approchée de x_0 avec une précision donnée à l'avance.

La méthode de dichotomie permet cela, et ne repose que sur un seul des résultats vus dans le chapitre précédent : le théorème des valeurs intermédiaires. Autrement dit, la seule hypothèse nécessaire pour la mettre en oeuvre est :

f est continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Dans ce cadre, une façon simple d'assurer que l'équation $f(x) = 0$ ait une solution dans $[a, b]$ est de supposer que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraires. Pour simplifier la discussion qui va suivre, on supposera même

$$f(a) < 0 < f(b).$$

Répetons-le, le Théorème des Valeurs Intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$

admet au moins une solution dans $[a, b]$, mais rien ne dit qu'elle est unique ; nous ferons cette hypothèse.

L'idée de la méthode est très simple : on coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux parties de même longueur $[a, c]$ et $[c, b]$ où $c = (a+b)/2$ est le milieu de $[a, b]$, et l'on cherche dans lequel de ces intervalles se trouve la solution x_0 . Elle est dans $[a, c]$ si $f(c) \geq 0$, et dans $[c, b]$ si $f(c) \leq 0$.

Le théorème qui suit montre que la répétition de ce raisonnement un assez grand nombre de fois conduit à une valeur approchée de x_0 avec n'importe quelle précision donnée à l'avance.

Proposition. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $f(a) < 0 < f(b)$, et telle que l'équation $f(x) = 0$ ait une seule solution dans $[a, b]$. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0, \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0, \end{cases} \quad \text{et } b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0, \\ b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0. \end{cases}$$

Les suites (a_n) et (b_n) convergent vers x_0 . De plus a_n (resp. b_n) est une valeur approchée de x_0 à $\epsilon = \frac{b-a}{2^n}$ près par défaut (resp. par excès).

Preuve. Pour ce qui est de la convergence, il suffit de remarquer que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes : (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, et l'on voit facilement par récurrence que $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$, donc en particulier que $(b_n - a_n) \rightarrow 0$. Ainsi (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ . Supposons que $f(\ell) \neq 0$. Puisque f est continue en ℓ , f garde un signe constant au voisinage de ℓ , disons sur $[\ell - \delta, \ell + \delta]$. Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $(b-a)/2^N \leq \delta$. Puisque $\ell \in [a_N, b_N]$, on a $[a_N, b_N] \subset [\ell - \delta, \ell + \delta]$. Donc $f(a_N)$ et $f(b_N)$ sont de même signe, ce qui est absurde par construction. Ainsi on a bien $\ell = x_0$. La dernière assertion de la proposition découle directement du fait que $a_n \leq x_0 < b_n$.

Cette méthode est tout à fait simple à programmer. Voici l'algorithme correspondant :

```
[lire a,b,precision];
Tant que (b-a)>precision
{
  c=(a+b)/2;
  si (f(c).f(b)<0 a="c<br" alors="alors">sinon b=c;
};
[afficher a];
```

Méthode du point fixe (Méthodes de résolution numérique d'équations)

1- Le théorème du point fixe

Définition : Soit f une fonction définie sur D . On dit que $x \in D$ est un point fixe de f lorsque $f(x) = x$.

Proposition Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$, telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour un $u_0 \in I$ donné. S'il existe un réel $0 \leq k < 1$ tel que $|f'(x)| \leq k < 1$, alors la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , qui est le seul point fixe de f sur I . De plus

$$|\ell - u_n| \leq k^n |\ell - u_0|.$$

Preuve: Supposons d'abord que f admette deux points fixes x_1 et x_2 distincts dans I . On aurait

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

ce qui est absurde. Donc f admet au plus un point fixe dans I .

On va montrer maintenant que (u_n) est une suite de Cauchy de \mathbb{R} , et donc qu'elle converge. Pour $n \geq 1$ on écrit $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$. On applique le théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités u_n et u_{n-1} : cet intervalle est inclus dans I , donc f y est C^1 , et il existe $c \in I$ tel que $u_{n+1} - u_n = (u_n - u_{n-1})f'(c)$. On a donc

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|$$

et par récurrence, on obtient

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|.$$

Soit maintenant $p \geq q$ deux entiers, et $m = p - q$, on a

$$|u_p - u_q| = |u_{q+m} - u_q| \leq |u_{q+m} - u_{q+m-1}| + |u_{q+m-1} - u_{q+m-2}| + \dots + |u_{q+1} - u_q|$$

et donc

$$|u_p - u_q| \leq (k^{q+m-1} + k^{q+m-2} + \dots + k^q)|u_1 - u_0|.$$

Or $k^{q+m-1} + k^{q+m-2} + \dots + k^q = k^q(1 + \dots + k^{m-1}) = k^q \frac{1-k^m}{1-k}$, donc

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1-k} |u_1 - u_0|.$$

Puisque $0 \leq k < 1$, on a $\lim_{q \rightarrow +\infty} k^q = 0$, donc pour $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^q}{1-k} |u_1 - u_0| \leq \epsilon$ pour tout $q \geq N_\epsilon$. Finalement, on a $|u_p - u_q| \leq \epsilon$ pour tout $p \geq q \geq N_\epsilon$: la suite (u_n) est une suite de Cauchy, et converge donc vers un réel $\ell \in I$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, et grâce à la continuité de f , on obtient bien $f(\ell) = \ell$. Pour ce qui est de la dernière inégalité, on a

$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leq k|u_{n-1} - \ell|$$

et le résultat découle d'une récurrence facile.

Attention ! ça ne marche pas si l'on suppose seulement que $|f'(x)| \leq 1$. Considérons par exemple la fonction $f :]1, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$ définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. La fonction f n'admet pas de point fixe : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$. Pourtant $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, donc $|f'(x)| \leq 1$ sur $]1, +\infty[$.

2- Points fixes attractifs et points fixes répulsifs

On se pose maintenant la question suivante : si α est un point fixe de f , peut-on obtenir une valeur approchée de α à partir d'une suite définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Autrement dit, peut-on trouver un intervalle I contenant α , stable par f et tel que f' vérifie une inégalité du type $|f'(x)| \leq k < 1$ sur I .

Définition Soit f une fonction C^1 sur \mathbb{R} , et α un point fixe de f . On dit que α est un point fixe attractif si $|f'(\alpha)| < 1$. On dit que α est un point fixe répulsif si $|f'(\alpha)| > 1$.

Exemple Soit $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$. En établissant son tableau de variations, on voit que f admet trois points fixes $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Le Théorème des Valeurs Intermédiaires permet de montrer que $-2,5 < \alpha_1 < 2$, $0 < \alpha_2 < 0,5$ et $1,5 < \alpha_3 < 2$. L'étude du sens de variation de f' permet de conclure que α_1 et α_3 sont des points fixes répulsifs, alors que α_2 est un point fixe attractif.

• Supposons que α soit un point fixe attractif. Puisque f' est continue, il existe $h > 0$ tel que, pour tout $x \in [\alpha - h, \alpha + h]$, on a $|f'(x)| \leq k < 1$, où par exemple $k = \frac{1+|f'(\alpha)|}{2}$. L'intervalle $I = [\alpha - h, \alpha + h]$ est stable pour f : si $x \in I$, le TAF appliqué sur l'intervalle d'extrémités x et α donne

$$|f(x) - \alpha| = |f(x) - f(\alpha)| \leq k|x - \alpha| \leq kh < h,$$

et donc $f(x) \in I$. On a démontré la

Proposition Si α est un point fixe attractif de f , il existe $h > 0$ tel que, pour tout $u_0 \in [\alpha - h, \alpha + h]$, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α .



• Maintenant si α est un point fixe répulsif de f , on aura $|f'(x)| > 1$ sur un voisinage I de α , et l'on ne pourra pas utiliser directement la méthode du point fixe pour obtenir une suite approchée de α . Il est cependant parfois possible de l'utiliser, d'abord dans le cas où l'on dispose d'une expression "explicite" pour f^{-1} . En effet puisque $|f'(x)| > 1$ sur I , et puisque f est continue sur I , on a ou bien $f'(x) > 1$ pour tout x de I , ou bien $f'(x) < -1$ pour tout x de I . En particulier f est strictement monotone sur I , et puisqu'elle y est continue, f est bijective de I sur $J = f(I)$. Il suffit alors de remarquer que α est automatiquement un point fixe attractif pour f^{-1} : on a en effet $f^{-1}(\alpha) = \alpha$, et $|(f^{-1})'(\alpha)| < 1$ puisque $(f^{-1})'(\alpha) = 1/f'(\alpha)$.

Dans le cas de la fonction $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$ par exemple, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection, et on a $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x - 1}$: on peut trouver une valeur approchée de α_1 (ou de α_2) en utilisant la méthode du point fixe pour f^{-1} ... à condition de disposer d'un moyen de calculer la racine cubique d'un réel.

• Il reste à considérer le cas des points fixes α qui ne sont ni attractifs, ni répulsifs, c'est à dire pour lesquels $|f'(\alpha)| = 1$. Dans ce cas, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ peut converger ou diverger, et ce même pour une donnée initiale arbitrairement proche de α .

Par exemple 0 est un point fixe de $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, et $f'(0) = \cosh(0) = 1$. Pour tout $u_0 > 0$, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est strictement croissante, donc ne peut pas converger vers 0 (en fait elle tend vers $+\infty$). Par contre 0 est aussi un point fixe de $g(x) = \sin x$, mais la suite $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers 0 pourvu que u_0 soit pris assez proche de 0 ($|u_0| \leq \pi/2$ suffit).

3- Algorithme

On suppose que α est un point fixe attractif de f , que f vérifie les hypothèses du Théorème du Point Fixe sur un intervalle I contenant α . On prend $u_0 \in I$ et on calcule les itérés suivants : $u_1 = f(u_0)$, $f(f(u_0))$, $f(f(f(u_0)))$, ... Quand peut-on s'arrêter ? On peut bien sûr estimer la constante $k < 1$ telle que $|f'(x)| < k$ sur I , et si l'on veut obtenir une valeur approchée à ϵ près, itérer N fois, où N est tel que (cf. le Théorème du Point Fixe)

$$k^N |I| < \epsilon,$$

où $|I|$ désigne la longueur de l'intervalle I . La détermination de k et N peut cependant être longue ou difficile, et l'on se contente plutôt de s'arrêter lorsque la distance entre deux itérés successifs est inférieure à ϵ/M , où M est choisi assez grand ($M = 10, 100, \dots$). On peut en effet écrire

$$|u_n - \ell| \leq |u_{n+1} - u_n| + |u_{n+1} - \ell| \leq |u_{n+1} - u_n| + k |u_n - \ell|,$$

et on aura donc

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{1-k} |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{\epsilon}{M(1-k)}.$$

On comprend que plus k est proche de 1, plus M doit être grand pour donner la précision attendue. Voilà un algorithme possible :

```
[lire x, precision];
M=10; /* l'algorithme donnera la précision attendue pour k<9
br="br">y=x+1;
Tant que (abs(y-x)>precision/M)
{
y=x;
x=f(x);
};
[afficher x];
```

Méthode de Newton (Méthodes de résolution numérique d'équations)

On va utiliser une méthode de point fixe pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. On suppose toujours que α est l'unique solution de cette équation dans un intervalle I donné. On va

simplement exhiber une fonction g dont α est un point fixe super-attractif, c'est-à-dire telle que $g(\alpha) = \alpha$ et $g'(\alpha) = 0$.

Historiquement, ce n'est pas ainsi qu'a été pensée la méthode. L'idée, attribuée à Isaac Newton, est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente. Plus précisément, partant d'une valeur approchée u_0 de α , on trace le point d'intersection de la tangente à C_f au point d'abscisse α et de l'axe des abscisses. Si cette tangente n'est pas horizontale, c'est-à-dire $f'(u_0) \neq 0$, on obtient un point M de coordonnées $M(u_1, 0)$ et un calcul simple montre que

$$u_1 = g(u_0) = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}.$$

Ayant en tête la figure ci-dessous, on espère que u_1 est une meilleure approximation de α que u_0 .

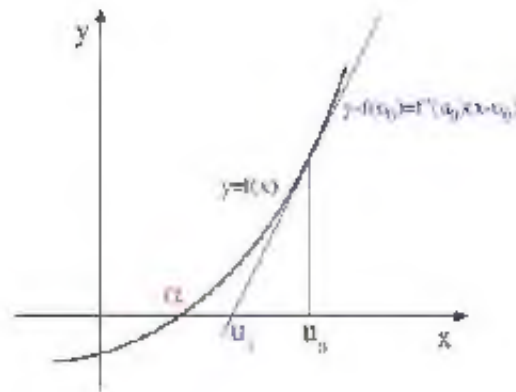


FIGURE - La méthode de Newton

La construction de Newton correspond bien à ce que nous avons annoncé. Il faut d'abord noter que si $f'(\alpha) \neq 0$, et puisque f' est continue, il existe un intervalle contenant α sur lequel f' ne s'annule pas. Dans ce cas, la fonction g définie par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est donc bien définie au voisinage de α . On a aussi $g(\alpha) = \alpha$, et on note que, si f est de classe C^2 ,

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

ce qui montre que $g'(\alpha) = 0$. Par conséquent α est un point fixe attractif de g , et il existe un intervalle I contenant α sur lequel on peut utiliser la méthode du point fixe : pour un u_0 assez proche de α , la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers α .

Du fait que $g'(\alpha) = 0$, la suite (u_n) converge très vite vers α . Le résultat suivant montre que partant d'une valeur approchée à 0,1 près, on obtient environ 2^n décimales exactes en n itérations.

Proposition Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $I = [\alpha - r, \alpha + r]$, où f' ne s'annule pas. On note

$$M = \sup_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right| \quad \text{et} \quad h = \min(r, 1/M).$$

Si $u_0 \in [\alpha - h, \alpha + h]$, et notant (u_n) la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, on a

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{M} (M|u_0 - \alpha|)^{2^n}$$

Par exemple pour $f(x) = x^3 - 4x + 1$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les points fixes α_1, α_2 et α_3 de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{3}(x^3 + 1)$ que nous avons déjà étudiés. Notant que ce sont des zéros simples de f , la méthode de Newton donne α_1, α_2 et α_3 comme points fixes de la fonction

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 4x + 1}{3x^2 - 4} = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 4}.$$

Le lecteur pourra vérifier que pour obtenir une valeur approchée à 10^{-15} près de α_2 par exemple, il faut calculer une douzaine de termes de la suite (u_n) construite avec h , alors que 5 termes de la suite construite avec g suffisent. Avec la méthode de dichotomie, il faut environ 50 itérations.

Une dernière remarque : l'estimation ci-dessus montre que la convergence est moins bonne quand le nombre M est grand, c'est-à-dire quand $f'(x)$ est proche de 0 sur I , et $f''(x)$ est grand sur I . La méthode de Newton est donc particulièrement efficace lorsque la racine que l'on cherche se trouve dans une région où la pente est grande ($|f'(x)| \gg 0$), et où elle ne varie pas beaucoup ($|f''(x)| \ll 1$). En particulier, cette méthode doit bien marcher... pour les droites qui ne sont pas horizontales !